

# Relativistische funktionale Methode zur Behandlung stark verkoppelter Fermionenfelder<sup>†</sup>

Von G. HEBER und A. KÜHNEL

Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität Leipzig \*

(Z. Naturforschg. 19 a, 1245—1253 [1964]; eingegangen am 13. Mai 1964)

A practical method for the calculation of GREEN's functions from the Lagrangian of a fermion-field is developed (in close analogy to <sup>3</sup>), which is working in a LORENTZ-invariant manner and allows to treat also strong couplings (or nonlinearities). The essential point is the use of the values for functional integrals over the fermion-field calculated in lattice space. It is considered, how the anticommutativity of the fermion-field appears in the result. There are two controls in our calculations: First the result of the integration must fulfill some functional differential equations. Secondly the result should coincide in one trivial, well-known example (free field) with the well-known exact result. Our result fits both controls. Explicitly we present here only the general aspects of the problem and apply them (in order to illustrate and to control the scheme) to the calculation of the 2-point-function of a free fermion-field, in which the mass-term has been split artificially into two parts, one of them is handled together with the free Lagrangian, the other one is treated as an "interaction". The use of certain graphs also here proves to be very useful. The application to more interesting cases is in preparation.

In früheren Arbeiten eines der Verfasser ist ausgehend von der HORISCHEN funktionalen Methode<sup>1</sup> ein praktisches Verfahren zur Berechnung der GREENSchen Funktionen aus der LAGRANGE-Dichte eines quantisierten Feldes vorgeschlagen worden<sup>2, 3</sup>. Dieses Verfahren ist bisher auf ein skalares reelles oder komplexes Feld angewandt worden. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, diese Methode auf die Berechnung der 2-Punkt-Funktion eines quantisierten Fermionenfeldes auszudehnen. Zur Illustration und Prüfung des Verfahrens wird unten das freie Fermionenfeld behandelt.

Man kann bekanntlich (s. z. B. <sup>4</sup>) die GREENSchen Funktionen eines Fermionenfeldes als Funktionalintegrale darstellen; zum Beispiel kann die 2-Punkt-Funktion

$$\frac{1}{2} S_{F\alpha_1\beta_1}(x_1, y_1) = \langle T(\bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\beta_1}(y_1) S) \rangle_0; \quad S = T(\exp\{i \int \mathcal{L}_W(x) dx\}) \quad (1)$$

$$\text{als} \quad \frac{1}{2} S_{F\alpha_1\beta_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{\langle S \rangle_0} \int \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\beta_1}(y_1) \cdot \exp\{i \int \mathcal{L} dx\} D(\bar{\psi}, \psi) \quad (2)$$

geschrieben werden.  $\mathcal{L}$  ist die LAGRANGE-Dichte des betrachteten Feldes,  $\mathcal{L}_W$  die Wechselwirkungs-LAGRANGE-Dichte;  $D(\bar{\psi}, \psi)$  bedeutet das Differential der funktionalen Integration über  $\bar{\psi}$  und  $\psi$ . Durch diese Schreibweise haben wir uns bereits darauf beschränkt, daß nur das Fermionenfeld vorhanden ist (frei oder in Selbstwechselwirkung). Für Wechselwirkungen mit anderen Feldern hat man noch über diese Felder zu integrieren.

In (1) und (2) ist zu beachten, daß wegen der Antikommutativität von  $\bar{\psi}$  und  $\psi$

$$\langle T(\bar{\psi}(x) \psi(y) S) \rangle_0 = - \langle T(\psi(y) \bar{\psi}(x) S) \rangle_0$$

gilt; in (2) sind  $\bar{\psi}$  und  $\psi$  daher antikommutierende  $c$ -Zahl-Funktionen:

$$\{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = \{\psi(x), \psi(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \psi(y)\} = 0.$$

Die Antikommutativität von  $\bar{\psi}$  und  $\psi$  und die Tatsache, daß  $\psi$  mehrere Komponenten hat, unterscheiden den jetzt behandelten Fall von früheren.

<sup>†</sup> Diese Arbeit ist als Teil II von Ref. <sup>3</sup> anzusehen.

\* Zur Zeit Dubna, Moskau, Vereinigtes Institut für Kernforschung.

<sup>1</sup> S. HORI, Nucl. Phys. **30**, 644 [1962].

<sup>2</sup> G. HEBER, Preprint E-1441, Dubna 1963, Acta Phys. Hung., **27**, 115 [1964].

<sup>3</sup> G. HEBER u. H.-J. KAISER, Preprint E-1500, Dubna 1964; Z. Naturforschg. **19 a**, 828 [1964].

<sup>4</sup> N. N. BOGOLYUBOV u. D. W. SHIRKOV, Introduction to the Theory of Quantized Fields, Interscience Publ., New York 1959, S. 493.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Wir spalten  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W$  auf und entwickeln den Exponentialfaktor mit  $\mathcal{L}_0$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_{F\alpha_1\beta_1}(x_1, y_1) &= \frac{1}{\langle S \rangle_0} \int \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\beta_1}(y_1) \exp\{i \int \mathcal{L}_0 dx\} \exp\{i \int \mathcal{L}_W dx\} D(\bar{\psi}, \psi) \\ &= \frac{1}{\langle S \rangle_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int G_{\alpha_2\beta_2}(x_2, y_2) \dots G_{\alpha_{n+1}\beta_{n+1}}(x_{n+1}, y_{n+1}) \varphi_{n+1}^{(x_1, \dots, y_{n+1})}_{\alpha_1 \dots \beta_{n+1}} dx_2 \dots dy_{n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Die  $G_{\alpha_i\beta_i}(x_i, y_i)$  und die  $\varphi_n$  hängen von der konkreten Aufspaltung  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W$  ab<sup>5</sup>. Wir legen  $\mathcal{L} = -\bar{\psi}(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi - g(\bar{\psi} \Gamma \psi)^q$  zugrunde [ $\Gamma = I, \gamma^\mu, \dots$ ; entsteht durch  $(\bar{\psi} \Gamma \psi)$  ein Vektor, Tensor, ..., dann ist zu beachten, daß  $(\bar{\psi} \Gamma \psi)^q$  ein Skalar wird]. Den Term  $-m\bar{\psi}\psi$  kann man sowohl zu  $\mathcal{L}_0$  als auch zu  $\mathcal{L}_W$  rechnen. Wir nehmen als  $\mathcal{L}_0$  die LAGRANGE-Dichte des freien DIRAC-Feldes

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\psi}(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi. \quad (4)$$

Dementsprechend sind 
$$G_{\alpha_i\beta_i}(x_i, y_i) = \delta(x_i - y_i) \left( -i\gamma_{\alpha_i\beta_i}^\mu \frac{\partial}{\partial y_i^\mu} + m\delta_{\alpha_i\beta_i} \right) \quad (5)$$

und 
$$\varphi_n^{(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)} = \int \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\beta_1}(y_1) \bar{\psi}_{\alpha_2}(x_2) \dots \psi_{\beta_n}(y_n) \exp\{i \int \mathcal{L}_W dx\} D(\bar{\psi}, \psi). \quad (6)$$

Der Nenner von (3),  $\langle S \rangle_0 = \int \exp\{i \int \mathcal{L} dx\} D(\bar{\psi}, \psi)$ , wird genauso entwickelt wie der Zähler. In den entsprechenden  $\varphi_n^{(0)}$  fehlt lediglich das Produkt  $\bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\beta_1}(y_1)$ .

Die Darstellung (3) für die 2-Punkt-Funktion ist hier im Gegensatz zu <sup>2,3</sup> ohne Verwendung des Begriffes der äußeren Quellen abgeleitet worden. Das ist günstig, weil man dabei keine Annahmen über die Konvergenz der in <sup>2,3</sup> verwendeten VOLTERRA-Reihe braucht.

Der Begriff der äußeren Quellen ist aber nützlich, um gewisse Beziehungen zwischen den  $\varphi_n$  herzuleiten. Das als

$$\Omega = \int \exp\{i \mathcal{L}_W^{(a)} dx\} D(\bar{\psi}, \psi)$$

definierte Funktional  $\Omega$  genügt für ein bestimmtes  $\mathcal{L}_W^{(a)}$  ganz bestimmten funktionalen Differentialgleichungen (in  $\mathcal{L}_W^{(a)}$  sind die äußeren Quellen enthalten), z. B. lautet für  $\mathcal{L}_W = -g\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)$

diese Differentialgleichung für  $\Omega = \int \exp\{-i \int (g\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}q - \bar{q}\psi) dx\} D(\bar{\psi}, \psi)$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial g} = i \int \frac{\delta}{\delta q_a(x)} \frac{\delta}{\delta q_a(x)} dx \cdot \Omega \quad (7)$$

(s. Anhang C). Die äußeren Quellen  $q$  und  $\bar{q}$  sind antikommutierende c-Zahl-Funktionen. Bei der Bildung der funktionalen Ableitungen hat man auf die Reihenfolge der Ableitungen zu achten. Die Ableitungen  $\delta/\delta q$  und  $\delta/\delta \bar{q}$  antikommutieren mit  $q$ ,  $\bar{q}$ ,  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  und untereinander und sind so definiert, daß man  $\delta/\delta q$  zuerst hinter die abzuleitende Größe kommutieren muß und dann die Ableitung bildet,  $\delta/\delta \bar{q}$  wird vor die zu differenzierende Größe gebracht (vgl. z. B. <sup>6</sup>), z. B.

$$\frac{\delta}{\delta q(y)} \bar{\psi}(x) q(x) = -\bar{\psi}(x) \frac{\delta}{\delta q(y)} q(x) = \bar{\psi}(x) q(x) \frac{\delta}{\delta q(y)} = \bar{\psi}(x) \delta(x-y); \quad \frac{\delta}{\delta q(y)} \bar{q}(x) \psi(x) = \delta(x-y) \psi(x).$$

$\Omega$  entwickeln wir in eine VOLTERRA-Reihe<sup>2</sup>:

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \int \varphi_n^{(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)}_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_n} \bar{q}_{\alpha_1}(x_1) q_{\beta_1}(y_1) \dots \bar{q}_{\alpha_n}(x_n) q_{\beta_n}(y_n) dx_1 \dots dy_n.$$

Aus (7) ergeben sich für die  $\varphi_n$  die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial g}_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_n} = -i \int \varphi_{n+1}^{(x, x_1, \dots, x_n; x, y_1, \dots, y_n)}_{\alpha \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha \beta_1 \dots \beta_n} dx. \quad (8)$$

<sup>5</sup> Siehe z. B. S. S. SCHWEBER, An Introduction to Relativistic Field Theory, Row, Petersen & Comp., Evanston 1961. Wir haben die unsymmetrische Form der LAGRANGE-Dichte aufgeschrieben, damit der Übergang zu den  $G_{\alpha_i\beta_i}(x_i, y_i)$  leichter zu erkennen ist. Unter Verwendung der symmetri-

schen wie bei SCHWEBER ergeben sich die gleichen Resultate. Wie SCHWEBER verwenden wir die Metrik  $+- - -$ . Die DIRAC-Gleichung für das freie Feld lautet  $(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$ .

<sup>6</sup> I. NOVOSHILOV u. A. TULUB, Fortschr. Phys. **6**, 50 [1958].

Die Funktionalintegrale für die  $\varphi_n$  möchte man wie früher im Gitterraum berechnen. Das scheint zunächst wegen der Antikommutativität der  $\bar{\psi}$  und  $\psi$  ganz unmöglich zu sein. Die Berechnung im Gitterraum ist jedoch auch in diesem Falle möglich, es muß nur darauf geachtet werden, daß vor dem Übergang vom Kontinuum zum Gitterraum immer eine bestimmte Reihenfolge der  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  vorhanden ist (vgl. 7, Anhang). Da die LAGRANGE-Dichte ein Skalar sein muß, können darin stets nur Produkte  $(\bar{\psi} \Gamma \psi)^q$  vorkommen ( $\Gamma = I, \gamma^\mu, \dots$ ).  $\bar{\psi}$  und  $\psi$  treten daher immer nur in diesen Kombinationen in den  $\varphi_n$  auf. Diese Produkte aus zwei Spinoren sind miteinander vertauschbar. Wie sich unten zeigen wird, entsteht bei der Integration über  $\bar{\psi}$  und  $\psi$  im Gitterraum nur dann ein von Null verschiedener Beitrag, wenn alle möglichen Produkte  $\bar{\psi}(y_i) \psi(x_i)$  jeweils an einem Gitterpunkt gebildet werden ( $x_i = x_j$ ). Die an den einzelnen Gitterpunkten betrachteten Größen sind demnach miteinander vertauschbar, so daß die Anordnung der Gitterpunkte, wie es sein muß, beliebig sein kann und keinen Einfluß auf das Ergebnis hat. Diese Bemerkung bedeutet aber nicht, daß die aus der Antikommutativität der  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  folgenden Eigenschaften der betrachteten 2-Punkt-Funktion bei der Integration im Gitterraum verlorengehen; es geht nur das Vorzeichen vor dem ganzen betrachteten Ausdruck verloren. Im Ergebnis für die  $\varphi_n$  drückt sich die Antikommutativität der  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  in der Antisymmetrie in den  $x_i$  bzw.  $y_i$  aus.

Die durch Integration im Gitterraum gewonnenen  $\varphi_n$  können in (8) eingesetzt werden und müssen diese Beziehungen erfüllen; das ist eine Prüfung der Rechnungen im Gitterraum, die zugleich das oben erwähnte Vorzeichen festlegt.

Wir werden im Abschnitt 1 die allgemeinen Eigenschaften der  $\varphi_n$  untersuchen. Im Abschnitt 2 werden wir die einzelnen Beiträge zu  $S_F$  als Graphen darstellen. Als einfachstes Beispiel behandeln wir in Abschnitt 3 das freie Feld.

### 1. Allgemeine Eigenschaften der $\varphi_n$

Wir beginnen mit den niedrigsten  $\varphi_n$ . Für  $\varphi_1$  haben wir

$$\varphi_{1, \alpha_1 \beta_1}^{(x_1, y_1)} = \int \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\beta_1}(y_1) \cdot \exp\{i \int \mathcal{L}_W dx\} D(\bar{\psi}, \psi). \quad (9)$$

Dieses Integral soll im Gitterraum berechnet werden. An jedem Gitterpunkt setzen wir

$$\psi_\alpha(x_k) = r_{\alpha, k} \exp\{i \varphi_{\alpha, k}\}; \quad \psi_\beta^*(y_l) = r_{\beta, l} \exp\{-i \varphi_{\beta, l}\}.$$

Es ist  $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$ ; für  $\gamma^0$  wählen wir die Darstellung (s. z. B. SCHWEBER<sup>5</sup>, S. 69):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Aus (9) wird im Gitterraum<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \varphi_{1, \alpha_1 \beta_1}^{(x_1, y_1)} &= \lim_k \prod_k \int r_{\varrho_1, k} \exp\{-i \varphi_{\varrho_1, k_1}\} \gamma_{\varrho_1, \alpha_1}^0 r_{\beta_1, l_1} \exp\{i \varphi_{\beta_1, l_1}\} \exp\{-i \varepsilon g(r_{1, k}^2 + r_{2, k}^2 - r_{3, k}^2 - r_{4, k}^2)^q\} \\ &\quad \cdot \prod_\alpha r_{\alpha, k} dr_{\alpha, k} d\varphi_{\alpha, k}. \end{aligned} \quad (11)$$

$\varepsilon$  ist das Volumen einer Zelle im Gitterraum. Die  $\varphi$ -Integrationen laufen von 0 bis  $2\pi$  und ergeben offenbar Null, wenn nicht  $k_1 = l_1$  und gleichzeitig  $\varrho_1 = \beta_1$  sind. Da  $\gamma^0$  diagonal ist, bedeutet  $\varrho_1 = \beta_1$  auch  $\alpha_1 = \beta_1$ . Wir bekommen also<sup>9</sup>

$$\varphi_{1, \alpha_1 \beta_1}^{(x_1, y_1)} = \lim_k \prod_k 2\pi \int r_{\varrho_1, k_1} \gamma_{\varrho_1, \alpha_1}^0 r_{\alpha_1, l_1} \exp\{-i \varepsilon g(r_{1, k}^2 + r_{2, k}^2 - r_{3, k}^2 - r_{4, k}^2)^q\} \prod_\alpha r_{\alpha, k} dr_{\alpha, k} \delta_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{k_1 l_1} \quad (12)$$

$$= \varphi_0 \varepsilon M_{1, \alpha_1} \delta_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{(x_1 - y_1)}. \quad (13)$$

<sup>7</sup> K. SYMANZIK, Z. Naturforschg. **9a**, 809 [1954].

<sup>8</sup> Wir beschränken uns bei der Angabe der  $M$  auf den Fall  $\Gamma = I$ . Anderenfalls stehen andere Kombinationen der  $r_i$  im Exponenten. Für die Wechselwirkung  $g \bar{\psi} \psi \varphi$  sind die hier aufgeschriebenen Ausdrücke unmittelbar zu verwenden.

<sup>9</sup> Der Faktor  $2\pi$  in jedem einzelnen Faktor des unendlichen Produktes rührt von der  $\varphi$ -Integration her und wird in  $\varphi_0$  aufgenommen. Im Gitterraum bedeuten die KRONECKER-Symbole  $\delta_{k_1 l_1}$  das Zusammenfallen zweier Zellen. Beim Übergang zum Kontinuum wird aus dem KRONECKER-Symbol  $\delta_{k_1 l_1} \rightarrow \varepsilon \delta(x_1 - y_1)$ .

In (12) und (13) ist über  $\alpha_1$  nicht zu summieren. Wir haben in (13) die Bezeichnungen

$$M_{1,\alpha_1} = \frac{\int r_\alpha \gamma_{\alpha_1}^0 r_{\alpha_1} \exp\{-i \varepsilon g(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2) q\} \prod_\alpha r_\alpha dr_\alpha}{\int \exp\{-i \varepsilon g(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2) q\} \prod_\alpha r_\alpha dr_\alpha} \quad (14)$$

und 
$$\varphi_0 = \lim_{k,2} \prod_{\alpha,k} 2\pi \int \exp\{-i \varepsilon g(r_{1,k}^2 + r_{2,k}^2 - r_{3,k}^2 - r_{4,k}^2) q\} r_{\alpha,k} dr_{\alpha,k} \quad \text{eingeführt.} \quad (15)$$

Die Phase  $\varphi$  hat sich also bei der Paarung  $\bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\alpha_1}(x_1)$  herausgehoben. Bleibt ein Faktor  $\exp\{\pm i \varphi_{\alpha,k}\}$  allein stehen, dann ergibt die Integration über  $d\varphi_{\alpha,k}$  Null (s. o.). Von Null verschiedene Beiträge stammen daher von allen in einem gegebenen  $\varphi_n$  möglichen Paarungen  $\bar{\psi} \psi$  der Faktoren vor der Exponentialfunktion an jeweils einem Gitterpunkt.

Sehen wir uns noch  $\varphi_2$  an:

$$\varphi_{2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2}^{(x_1, x_2; y_1, y_2)} = \int \bar{\psi}_{\alpha_1}(x_1) \psi_{\beta_1}(y_1) \bar{\psi}_{\alpha_2}(x_2) \psi_{\beta_2}(y_2) \exp\{i \mathcal{L}_W dx\} D(\bar{\psi}, \psi). \quad (16)$$

Produkte, für die sich (im Gitterraum) die Phasenfaktoren  $\exp\{\pm i \varphi_{\alpha,k}\}$  vor der Integration wegheben, erhält man für  $x_1 = y_1$ ,  $\alpha_1 = \beta_1$  und  $x_2 = y_2$ ,  $\alpha_2 = \beta_2$  sowie für  $x_1 = y_2$ ,  $\alpha_1 = \beta_2$  und  $x_2 = y_1$ ,  $\alpha_2 = \beta_1$ . Bei der letzteren Bildung muß man drei Vertauschungen vornehmen und erhält ein negatives Vorzeichen. Natürlich ergibt sich auch ein von Null verschiedener Beitrag, wenn alle vier Argumente ( $x_1 = x_2 = y_1 = y_2$ ) zusammenfallen; dann müssen die Spins  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  und  $\beta_1 \neq \beta_2$  sein.

Insgesamt erhalten wir für  $\varphi_2$

$$\varphi_{2 \alpha_1 \dots \beta_2}^{(x_1 \dots y_2)} = \varphi_0 \left\{ \varepsilon^2 M_{1,\alpha_1} M_{1,\alpha_2} + \varepsilon^3 (M_{2,\alpha_1 \alpha_2} - M_{1,\alpha_1} M_{1,\alpha_2}) \delta(x_1 - x_2) \right\} \begin{vmatrix} \delta_{\alpha_1 \beta_1} \delta(x_1 - y_1) & \delta_{\alpha_1 \beta_2} \delta(x_1 - y_2) \\ \delta_{\alpha_2 \beta_1} \delta(x_2 - y_1) & \delta_{\alpha_2 \beta_2} \delta(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \quad (17)$$

mit 
$$M_{2,\alpha_1 \alpha_2} = \frac{\int r_\alpha \gamma_{\alpha_1}^0 r_{\alpha_1} r_\sigma \gamma_{\alpha_2}^0 r_{\alpha_2} \exp\{-i \varepsilon g(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2) q\} \prod_\alpha r_\alpha dr_\alpha}{\int \exp\{-i \varepsilon g(r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2) q\} \prod_\alpha r_\alpha dr_\alpha}. \quad (18)$$

In (17) und (18) ist über doppelt auftretende Indizes nicht zu summieren. Nach Anwendung des Operators  $G_{\alpha_2 \beta_2}(x_2, y_2)$  ist bei der Summation über  $\alpha_2$  zu beachten, daß  $\alpha_2$  dreimal vorkommt.] Die Faktoren  $M_i$  und die entsprechenden Kombinationen daraus haben denselben Ursprung wie beim skalaren Feld (s. a. Anhang A).

$\varphi_n$  wird dementsprechend die  $n$ -reihige Determinante  $\|\delta_{\alpha_i \beta_j} \delta(x_i - y_j)\|$  enthalten. Die Antikommutativität der  $\bar{\psi}, \psi$  bewirkt das Auftreten der Determinante, also Antisymmetrie in den  $x_i$  bzw.  $y_j$ .

Außer dem Grundterm, bei dem alle  $n$  Punkte voneinander verschieden sind, enthält  $\varphi_n$  noch Beiträge, für die zwei oder mehr Punkte zusammenfallen. Es können aber nicht mehr als vier Punkte ( $x_i, y_i$ ) in einen Punkt zusammenfallen, weil sonst die Spin-Determinante Null ergibt. Allgemein können von beliebig vielen verschiedenen Punkten maximal je vier Punkte zusammenfallen.

Fallen zwei, drei oder vier Punkte zusammen, so wird die Determinante mit weiteren  $\delta$ -Funktionen multipliziert. Der Faktor mit diesen zusätzlichen  $\delta$ -Funktionen wird in allen  $n$  Punkten ( $x_i, y_i$ ) symmetrisiert. Ein Produkt aus einer (zwei Punkte gleich), zwei (drei Punkte gleich) oder drei (vier Punkte gleich)  $\delta$ -Funktionen wird mit der entsprechenden Kombination der  $M_i$  (A.1), (A.2) bzw. (A.3) multipliziert (s. Anhang A).

## 2. Darstellung der Beiträge zu $S_F$ durch Graphen

Wir befassen uns weiter nur mit dem Fall, daß die  $M_i$  keine Indizes tragen<sup>10</sup> und geben eine graphische Darstellung der Beiträge von  $\varphi_n$  zu  $S_F$  an, die zweckmäßig ist, um einen Überblick über die vielfältigen

<sup>10</sup> Würden die  $M$  Indizes tragen, dann würden die einzelnen Summanden in den Summen über  $\alpha_i$  ( $i \geq 2$ ) im allgemeinen mit verschiedenen Faktoren multipliziert, und man könnte sie nicht mehr vor den Operator (20) ziehen. Die

einzelnen Teile der Graphen würden eine etwas andere Bedeutung erhalten, an ihrer Gestalt würde sich nichts ändern.

Beiträge zu der Reihe (3) zu gewinnen. Dabei gehen wir an Hand des Beispiels

$$\delta(x_1 - y_2) \delta(x_2 - y_3) \dots \delta(x_{n-1} - y_n) \delta(x_n - y_1) \delta_{\alpha_1 \beta_2} \delta_{\alpha_2 \beta_3} \dots \delta_{\alpha_{n-1} \beta_n} \delta_{\alpha_n \beta_1} \quad (19)$$

vor. Auf (19) wirkt der Operator

$$\int dx_2 \dots dx_n dy_2 \dots dy_n \delta(x_2 - y_2) \left( -i \gamma_{\alpha_2 \beta_2}^\mu \frac{\partial}{\partial y_2^\mu} + \delta_{\alpha_2 \beta_2} m \right) \dots \delta(x_n - y_n) \left( -i \gamma_{\alpha_n \beta_n}^\mu \frac{\partial}{\partial y_n^\mu} + \delta_{\alpha_n \beta_n} m \right). \quad (20)$$

Die Anwendung des Operators (20) auf (19) ergibt

$$\left( -i \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m \right)^{n-1} \delta(x_1 - y_1). \quad (21)$$

Bei der Berechnung von (21) haben wir mehrfach partiell integriert und die Eigenschaften der  $\delta$ -Funktionen und ihrer Ableitungen verwendet. Wir wollen die notwendigen Rechnungen für  $n=3$  wiedergeben. Es ist

$$I = \iiint dx_2 dy_2 dx_3 dy_3 \delta(x_2 - y_2) \delta(x_3 - y_3) \left( -i \gamma_{\alpha_2 \beta_2}^\mu \frac{\partial}{\partial y_2^\mu} + \delta_{\alpha_2 \beta_2} m \right) \left( -i \gamma_{\alpha_3 \beta_3}^\mu \frac{\partial}{\partial y_3^\mu} + \delta_{\alpha_3 \beta_3} m \right) \cdot \delta(x_1 - y_2) \delta(x_2 - y_3) \delta(x_3 - y_1) \delta_{\alpha_1 \beta_2} \delta_{\alpha_2 \beta_3} \delta_{\alpha_3 \beta_1}$$

umzuformen. Wir integrieren zuerst über  $y_2$  und verwenden

$$\int f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) dx = -f'(0);$$

gleichzeitig führen wir die notwendigen Summationen über die Spinindizes aus:

$$I = \iint dx_2 dy_2 dx_3 \delta(x_2 - y_2) \left( i \gamma_{\alpha_2 \alpha_1}^\mu \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} + \delta_{\alpha_2 \alpha_1} m \right) \delta(x_3 - x_2) \left( -i \gamma_{\beta_1 \alpha}^\mu \frac{\partial}{\partial y_2^\mu} + \delta_{\beta_1 \alpha} m \right) \delta(x_1 - y_2) \delta(x_3 - y_1).$$

Die Integration über  $x_3$  ergibt

$$I = \iint dx_2 dy_2 \delta(x_2 - y_2) \left( i \gamma_{\alpha_2 \alpha_1}^\mu \frac{\partial}{\partial x_2^\mu} + \delta_{\alpha_2 \alpha_1} m \right) \delta(y_1 - x_2) \left( -i \gamma_{\beta_1 \alpha}^\mu \frac{\partial}{\partial y_2^\mu} + \delta_{\beta_1 \alpha} m \right) \delta(x_1 - y_2).$$

Die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_2^\mu}$  schreiben wir nach der Formel  $\frac{\partial}{\partial y} \delta(x - y) = -\frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y)$  als Ableitung nach  $y_1$ .

Dann ziehen wir den Operator  $\left( -i \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m \right)$  vor das Integral. Anschließend wiederholen wir dieselben Schritte in derselben Reihenfolge für  $y_2$  und  $x_2$  und erhalten

$$I = \left( -i \gamma_{\alpha_2 \alpha_1}^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + \delta_{\alpha_2 \alpha_1} m \right) \left( -i \gamma_{\beta_1 \alpha}^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + \delta_{\beta_1 \alpha} m \right) \delta(x_1 - y_1) = \left( -i \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m \right)^2 \delta(x_1 - y_1).$$

Für  $n=3$  ist das der (21) entsprechende Ausdruck. Durch Anwendung immer der gleichen Rechenschritte kann man einen Ausdruck beliebiger Ordnung in die Gestalt (21) bringen.

Wir haben hier symbolisch  $\left( -i \gamma_{\alpha_1 \beta_1}^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m \right)^n$  geschrieben. Bei dieser Produktbildung ist immer über zwei Indizes zweier aufeinanderfolgender  $\gamma$  (und  $\delta$ ) zu summieren; das erste  $\gamma$  trägt den Index  $\alpha_1$  an zweiter Stelle, das letzte den Index  $\beta_1$  an erster Stelle (entsprechendes gilt für die  $\delta$ 's bei  $m$ ).

Wir stellen zunächst jede Variable  $x_i$  und  $y_j$  durch einen Punkt dar. Die beiden Punkte ( $x_i$  und  $y_i$ ), die im Operator (20) im Argument einer  $\delta$ -Funktion stehen, verbinden wir miteinander durch eine Linie. Die freien Enden  $x_1$  und  $y_1$  kennzeichnen wir durch eine kurze Linie (Abb. 1 a). Schließlich lassen wir

die beiden Punkte, die in einem Argument einer  $\delta$ -Funktion von (19) stehen, zu einem Doppelpunkt zusammenfallen (Abb. 1 b).

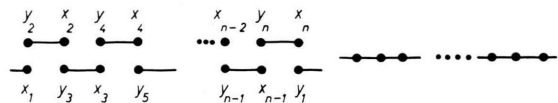


Abb. 1 a.

Abb. 1 b.

Außer diesen zusammenhängenden Graphen, die wir als Grundgraphen bezeichnen werden, kommen noch nicht zusammenhängende Graphen aus der De-

terminante für  $\varphi_n$ . Zum Beispiel resultieren aus  $\varphi_3$  die Graphen (alle drei Punkte sind voneinander verschieden):

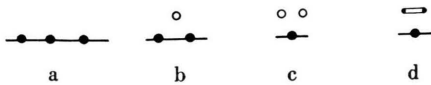


Abb. 2.

die die folgenden Ausdrücke darstellen:

- a)  $\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m\right)^2 \delta(x_1 - y_1),$   
 b)  $m \delta(0) \left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m\right) \delta(x_1 - y_1),$   
 c)  $[m \delta(0)]^2 \delta(x_1 - y_1) \delta_{\alpha_1 \beta_1},$   
 d)  $\left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y_2^\mu} + m\right)^2 \delta(0) \cdot \delta(x_1 - y_1).$

Die Schreibweise  $\delta(0)$  ist hier nur der Kürze halber verwandt worden. Der Ausdruck für den Graphen Abb. 2 b lautet ausführlicher geschrieben

$$\int \delta^2(x_2 - y_2) dx_2 dy_2 \left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m\right) \delta(x_1 - y_1).$$

Wir berechnen alle Funktionalintegrale im Gitterraum. Dabei ergibt sich (nach der Rückkehr zum Kontinuum)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta(x) = 0;$$

das werden wir im folgenden ausnutzen.

Die Beiträge der nicht zusammenhängenden Graphen kürzen sich in  $S_F$  gegen die entsprechenden Beiträge des Nenners.

Die einzelnen Graphen kommen verschieden häufig vor, sie müssen daher noch mit bestimmten Gewichten multipliziert werden. In diesen Gewichten sind auch die Faktoren enthalten, die sich bei der Summation über die Spinindizes durch Kontraktionen von  $\gamma$  oder  $\delta$  ergeben.

Zur Illustration geben wir alle Beiträge mit den zugehörigen Gewichten von  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  zu  $S_F$  an:

$$\text{---} \bullet \text{---} - \delta(x_1 - y_1) \delta_{\alpha_1 \beta_1}$$

Abb. 3.

$$\text{---} \bullet \text{---} - \left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m\right) \delta(x_1 - y_1)$$

$$\text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} 3 m \delta(0) \cdot \delta(x_1 - y_1) \delta_{\alpha_1 \beta_1}$$

Abb. 4.

$$\begin{aligned} & \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} - \left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m\right)^2 \delta(x_1 - y_1) \\ & \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} 12 m \delta(0) \left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial y_1^\mu} + m\right) \delta(x_1 - y_1) \\ & \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} 12 [(i\gamma^\mu \partial + m)^2 \delta(0)] \cdot \delta(x_1 - y_1) \\ & \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} - 6 [m \delta(0)]^2 \delta(x_1 - y_1) \delta_{\alpha_1 \beta_1} \end{aligned}$$

Abb. 5.




In den Ausdrücken zu Abb. 4 und 5 steht immer  $x_1$  im Argument des Symbols  $\delta(0)$  (z. B.

$$12 (-i\gamma^\mu \partial + m)^2 \delta(0) \delta(x_1 - y_1)$$

die abgekürzte Schreibweise für

$$12 \int \left[ \left(-i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_3^\mu} + m\right)^2 \delta(x_3 - x_1) \right] \cdot \delta(x_3 - x_1) \delta(x_3 - y_1) dx_3,$$

in den Ausdrücken zu Abb. 2 ist das nicht der Fall, deshalb zerfallen diese. Die Ableitungen wirken immer nicht auf  $x_1$ , sondern auf den anderen Teil des Argumentes, aus dem die Null entsteht.

Beim Zusammenfallen zweier oder mehrerer Punkte ist zu beachten, daß man nicht nur aus den Grundgraphen Beiträge erhält, sondern auch von den in der Determinante enthaltenen zerfallenden Graphen, weil aus diesen zusammenhängende Graphen werden können. Das ist beim Aufschreiben der Gewichte zu beachten (s. Anhang B). Zum Beispiel ergibt sich der Graph  aus dem Grundgraphen  und aus , wenn die beiden Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  zusammenfallen.

Als allgemeine Regel gilt für die Konstruktion der Graphen: Man lasse die in den zusätzlichen  $\delta$ -Funktionen in einem Argument stehenden Punkte zusammenfallen; dabei hält man sich am besten Abb. 1 a vor Augen. So entstehen alle möglichen Graphen (mit Schleifen, Verzweigungen und Mehrfachbindungen).

Das Schema Abb. 7 aus <sup>3</sup> ist auch jetzt nützlich. Es bleibt unverändert gültig und ordnet die verschiedenen Beiträge zu  $S_F$ .

### 3. Das freie Feld

Als einziges Anwendungsbeispiel behandeln wir hier das freie Feld. Die LAGRANGE-Dichte ist

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi} (-i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi - g \bar{\psi} \psi.$$



Das Glied  $-g \bar{\psi} \psi$  haben wir eingeführt, um zu sehen, ob sich ein Unterschied ergibt, wenn man den Massenterm zu  $\mathcal{L}_0$  oder zu  $\mathcal{L}_W$  nimmt.

Es sind die Integrale (14), (18) und entsprechend  $M_3$  und  $M_4$  mit  $q = 1$  zu berechnen. Für  $\alpha_1 = 1, 2$  ist

$$M_{1,1} = M_{1,2} = \frac{\int r_1^3 \exp\{-i \varepsilon g r_1^2\} dr_1}{\int r_1 \exp\{-i \varepsilon g r_1^2\} dr_1} = \frac{1}{i g \varepsilon}, \quad (22)$$

weil die vierfachen Integrale in ein Produkt aus vier Integralen zerfallen; drei Integrale kürzen sich heraus. Ferner ist für  $\alpha_1 = 3, 4$

$$M_{1,3} = M_{1,4} = \frac{-\int r_3^3 \exp\{i \varepsilon g r_3^2\} dr_3}{\int r_3 \exp\{i \varepsilon g r_3^2\} dr_3} = \frac{1}{i g \varepsilon}. \quad (23)$$

Man braucht  $M_1$  also nicht mit einem zusätzlichen Index zu versehen. Das gleiche gilt für  $M_2$  (wobei zu beachten ist, daß  $\alpha_1 = \alpha_2$  wegen der Antisymmetrie der  $\varphi_n$  und  $x_1 = x_2$  nicht vorkommen kann) usw. Ferner sind  $M_2 = M_1^2$ ,  $M_3 = M_1^3$  und  $M_4 = M_1^4$ , wie man der Struktur der Integrale leicht entnimmt. Nach (A.1), (A.2) und (A.3) liefern nur die Grundgraphen Beiträge zu  $S_F$ .

Die Integrale (22) und (23) sind nur bedingt konvergent. Man muß deshalb beide mit Konvergenzfaktoren multiplizieren. Als diese Faktoren wählt man zweckmäßig  $\exp\{-\varepsilon'(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)\}$  mit  $\varepsilon' > 0$ . Statt (22) ergibt sich dann  $1/(\varepsilon' + i g \varepsilon)$  und statt (23)  $-1/(\varepsilon' - i g \varepsilon)$ . Diese beiden Ausdrücke sind im Grenzfall  $\varepsilon' \rightarrow 0$  einander gleich:  $M_1 = 1/i g \varepsilon$ . Wir werden  $\varepsilon'$  bei allen Rechnungen weglassen und nur im Endergebnis vermerken.

Von

$$\begin{aligned} \varphi_{n\alpha_1 \dots \beta_n}^{(x_1, \dots, y_n)} &= (-1)^n \varphi_0 M_1^n \varepsilon^n \parallel \delta_{\alpha_i \beta_j} \delta(x_i - y_j) \parallel \\ &= \frac{(-1)^n \varphi_0}{(i g)^n} \parallel \delta_{\alpha_i \beta_j} \delta(x_i - y_j) \parallel \end{aligned} \quad (24)$$

benötigen wir nur die Terme, die zusammenhängende Graphen (die Grundgraphen) ergeben. Wir kontrollieren zunächst, ob das durch (24) gegebene  $\varphi_n$  die Beziehung (8) erfüllt. Aus (8) ergibt sich die Gleichung (s. Anhang C)

$$\iint \delta^2(x - y) dx dy = \frac{g}{4 \varphi_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial g},$$

die natürlich erfüllt werden kann<sup>11</sup>.

<sup>11</sup> Eine andere Möglichkeit, (24) zu prüfen, ergibt sich daraus, daß  $\Omega$  für das freie Feld mit einer Formel von SYMANZIK<sup>7</sup> geschlossen als Funktional von  $\varrho$  und  $\bar{\varrho}$  dargestellt werden kann (durch geschlossene Ausführung der

Der Beitrag eines Grundgraphen  $n$ -ter Ordnung zur Reihe (3) ist

$$\begin{aligned} \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{-1}{(i g)^n} (n-1)! (-i \gamma \partial + m)^{n-1} \delta(x_1 - y_1) \\ = \frac{i}{g} \left( \frac{-i \gamma \partial + m}{-g} \right)^{n-1} \delta(x_1 - y_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Bevor wir die Reihe (3) aufsummieren, ist es zweckmäßig, zur FOURIER-Transformierten von  $S_F$  überzugehen:

$$S_F(y - x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp\{-i p(y - x)\} S_F(p) dp.$$

Setzen wir für

$$\delta(x_1 - y_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp\{-i p(y_1 - x_1)\} dp,$$

so erhalten wir für  $S_F$  (25) in der  $p$ -Darstellung

$$\frac{1}{2} S_F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{g} \left( \frac{-\gamma p + m}{-g} \right)^n.$$

Aus dieser (3) entsprechenden Reihe kann man den ersten Faktor der einzelnen Glieder herausziehen. Die verbleibende Reihe ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-\gamma p + m}{-g} \right)^n = \frac{-g}{\gamma p - m - g},$$

und es ergibt sich für  $S_F(p)$

$$\frac{1}{2} S_F(p) = -i/(\gamma p - m - g).$$

Wir erinnern uns an den Konvergenzfaktor bei der Berechnung von  $M_1$  und schreiben dementsprechend den kleinen Summanden  $i \varepsilon'$  in den Nenner:

$$\frac{1}{2} S_F(p) = -i/(\gamma p - m - g + i \varepsilon').$$

Das stimmt mit dem üblichen Ausdruck für  $S_F$  für ein freies Fermionenfeld überein (vgl. SCHWEBER<sup>5</sup>, S. 446).

#### 4. Schluß

Die in 2.<sup>3</sup> vorgeschlagene Methode zur Berechnung von Zwei-Punkt-Funktionen läßt sich also nach gewissen Modifikationen auch für ein Fermionenfeld verwenden. Am Beispiel des freien Feldes haben wir uns überzeugt, daß unsere Methode zum richtigen Ergebnis führt, unabhängig davon, ob die Masse in  $\mathcal{L}_0$  oder  $\mathcal{L}_W$  aufgenommen wird. Das Beispiel des freien Feldes diente uns natürlich nur zur Prüfung

HILBERT-Raum-Integration). Entwickelt man dieses  $\Omega$  in eine VOLTERRA-Reihe, so erhält man als Koeffizienten genau unsere  $\varphi_n$ .

unserer Methode. Die eigentlich interessanten Fälle für die Anwendung unserer Methode sind Felder mit starken Nichtlinearitäten und stark verkoppelte Felder. In diesen Fällen ist das Vorgehen prinzipiell geklärt; es werden aber nicht mehr nur Beiträge von den Grundgraphen auftreten, und die Summation der Reihe (3) wird schwieriger werden. Es besteht aber genau wie im Falle des skalaren Feldes die Möglichkeit, unsere Ergebnisse mit der LEHMANNschen Spektraldarstellung zu vergleichen und auf wichtige Eigenschaften des Fermionenfeldes zu schließen, ohne die ganze Reihe (3) aufsummieren zu müssen.

Die Behandlung realer Wechselwirkungen und Nichtlinearitäten soll der Gegenstand weiterer Arbeiten sein. Auch Mehr-Punkt-Funktionen lassen sich prinzipiell mit unserer Methode berechnen.

Wir möchten Herrn Dr. H.-J. KAISER (Dubna) für wertvolle Diskussionen herzlich danken. Ferner gilt unser Dank der Direktion des Vereinigten Instituts für Kernforschung in Dubna für die erwiesene Gastfreundschaft und das Interesse an unserer Arbeit.

### Anhang A. Zur Berechnung der Momente

Die Momente  $M$  vor den verschiedenen Produkten von  $\delta$ -Funktionen in den  $\varphi_n$  tragen im Fermionenfall im allgemeinen Indizes [s. z. B. (18)]. In der Darstellung (10) ist  $\gamma^0$  diagonal, und es genügt, die  $M$  nur mit einem Index zu versehen. Über  $\alpha_1$  wird nie summiert, auch wenn es doppelt auftritt. Die Summationsindizes  $\alpha_i$  ( $i \geq 2$ ) treten dreimal auf; diese Abweichung von der Summationsvorschrift entsteht bei der Darstellung von  $\psi_a$  als  $r_a \exp\{i\varphi_a\}$ .

Die  $M$  mit den verschiedenen Indizes können sich in speziellen Fällen auch als gleich ergeben. Dann kann man die Indizes weglassen und die entsprechenden Kombinationen der Momente ergeben sich identisch mit denjenigen für das skalare Feld (s. <sup>3</sup>).

Da im Fermionenfall maximal nur vier Punkte in einem Punkt zusammenfallen können, benötigen wir nur die folgenden drei Kombinationen: für zwei zusammenfallende Punkte

$$M_2 - M_1^2, \quad (\text{A.1})$$

für drei zusammenfallende Punkte

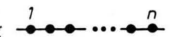
$$M_3 - 3(M_2 - M_1^2)M_1 - M_1^3, \quad (\text{A.2})$$

für vier zusammenfallende Punkte

$$M_4 - 4[M_3 - 3(M_2 - M_1^2)M_1 - M_1^3]M_1 - 3(M_2 - M_1^2)^2 - 6M_1^2(M_2 - M_1^2) - M_1^4. \quad (\text{A.3})$$

Für einen einzelnen Punkt kommt noch der Faktor  $M_1$  hinzu. Für die einzelnen Beiträge zu  $\varphi_n$  haben wir die entsprechenden Kombinationen der Momente zu multiplizieren, je nachdem wie oft und wie viele Punkte zusammenfallen, so daß die Summe der Exponenten von  $M_1$  immer  $n$  ist.


### Anhang B. Gewichte der Graphen

Der Grundgraph  $n$ -ter Ordnung  hat das Gewicht  $-(n-1)!$ . Das ist die Anzahl der möglichen Permutationen der Linien zwischen den  $n$  Punkten oder auch die Anzahl der Produkte der Determinante  $n$ -ter Ordnung, in denen die  $n$  Punkte nicht zu irgendwelchen Zyklen zusammengeschlossen sind. Das Gewicht eines Graphen  $n$ -ter Ordnung (mit  $n$  voneinander verschiedenen Punkten) mit Vakuumschleifen ist

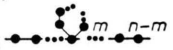
$$\left(\frac{(n-1)!}{m!}\right) \prod_i \binom{m-l_i-1}{l_i} (l_i-1)! \prod_v \frac{1}{r_v!} 4^i (-1)^{i+1}.$$

Darin sind  $n$  die Ordnung des Graphen,  $i$  die Anzahl der Vakuumschleifen,  $m$  die Anzahl der Punkte in allen Vakuumschleifen,  $l_i$  die Zahl der Punkte in einer Vakuumschleife,  $l_0=0$ ,  $r_v$  ist die Anzahl der symmetrischen Vakuumschleifen.

Der Faktor  $-(n-1)!$  ist das Gewicht des Grundgraphen; durch  $m!$  muß dividiert werden, wenn  $m$  Punkte aus dem Grundgraphen herausgenommen werden.  $\binom{m-l_i-1}{l_i}$  ist die Zahl der Möglichkeiten, aus  $(m-l_i-1)$  Punkten Gruppen von  $l_i$  Punkten zusammenzustellen.  $(l_i-1)!$  ist die Zahl der Permutationen der Linien einer geschlossenen Schleife aus  $l_i$  Punkten. Die Faktoren  $4^i$  stammen von Kontraktionen der  $\gamma$  und  $\delta$ .

Das Gewicht eines Graphen  $n$ -ter Ordnung mit einer Schleife  ist die Zahl der Möglichkeiten, daß von  $n$  Punkten jeweils zwei aufeinanderfolgende übereinstimmen, multipliziert mit dem Gewicht des Grundgraphen:  $-(n-1)(n-1)!$ . Genauso oft ergibt sich dieser Graph auch aus dem Graphen  $n$ -ter Ordnung mit einer Vakuumschleife. Das Gesamtgewicht des betrachteten Graphen ist also

$$3(n-1)!(n-1).$$

Analog ergibt sich für den Graphen  das Gewicht  $3(n-1)!(n-m)$ . Ähnlich sind auch die Gewichte für alle anderen Arten von Graphen beschaffen.



**Anhang C. Funktionalgleichungen für  $\Omega$  und  $\varphi_n$** 

Für  $\Omega = \int \exp \{ -i \int (g \bar{\psi} \psi - \bar{q} \psi - \bar{\psi} q) dx \} D(\bar{\psi}, \psi)$  sind

$$\frac{\partial \Omega}{\partial g} = -i \int \bar{\psi} \psi \exp \{ -i \int (g \bar{\psi} \psi - \bar{q} \psi - \bar{\psi} q) dx \} D(\bar{\psi}, \psi) dx',$$

und  $\int dx \frac{\delta^2 \Omega}{\delta q(x) \delta \bar{q}(x)} = - \int \bar{\psi} \psi \exp \{ -i \int (g \bar{\psi} \psi - \bar{q} \psi - \bar{\psi} q) dx \} D(\bar{\psi}, \psi) dx'$

daher gilt  $\frac{\partial \Omega}{\partial g} = i \int \frac{\delta^2}{\delta q(x) \delta \bar{q}(x)} dx \Omega$ .

Setzen wir hier die Entwicklung für  $\Omega$  ein, so ergeben sich

$$\frac{\partial \Omega}{\partial g} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \int \frac{\partial \varphi_n}{\partial g} \bar{q}_{\alpha_1}(x_1) \dots q_{\beta_n}(y_n) dx_1 \dots dy_n$$

und  $\int \frac{\delta^2}{\delta q(x) \delta \bar{q}(x)} dx \Omega = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \int \varphi_{n+1}^{(x, x_1, \dots, x_n; x, y_1, \dots, y_n)} \bar{q}_{\alpha_1}(x_1) \dots q_{\beta_n}(y_n) dx dx_1 \dots dy_n,$

also muß  $\frac{\partial \varphi_n}{\partial g} = -i \int \varphi_{n+1}^{(x, x_1, \dots, x_n; x, y_1, \dots, y_n)} dx$  (C.1)

gelten. Wir berechnen nun die beiden Seiten von (C.1) mit dem Ausdruck (24) für  $\varphi_n$  und haben

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial g} = (-1)^n \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial g} \frac{1}{(ig)^n} - \frac{in}{(ig)^{n+1}} \varphi_0 \right\} \| \delta_{\alpha_i \beta_j} \delta(x_i - y_j) \|. \quad (C.2)$$

Ferner ist

$$\int \varphi_{n+1}^{(x, x_1, \dots, x_n; x, y_1, \dots, y_n)} dx = \frac{(-1)^{n+1} \varphi_0}{(ig)^{n+1}} \int dx \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\alpha} \delta(x-x) & \delta_{\alpha\beta_1} \delta(x-y_1) & \dots \\ \delta_{\alpha_1\alpha} \delta(x_1-x) & \delta_{\alpha_1\beta_1} \delta(x_1-y_1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (C.3)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \varphi_0}{(ig)^{n+1}} [4 \int \delta(x-x) dx - n] \| \delta_{\alpha_i \beta_j} \delta(x_i - y_j) \|. \quad (C.4)$$

(C.4) ergibt sich, indem man die Determinante in (C.3) nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt. Die Determinante in (C.4) ist  $n$ -reihig. Für  $\int \delta(x-x) dx$  schreiben wir den Ausdruck hin, aus dem es [bei der Ableitung von (C.1)] entstanden ist:

$$\int \varphi_{n+1}^{(x, x_1, \dots, x_n; x, y_1, \dots, y_n)} dx = \frac{(-1)^{n+1} \varphi_0}{(ig)^{n+1}} \| \delta_{\alpha_i \beta_j} \delta(x_i - y_j) \| (4 \iint \delta^2(x-\xi) dx d\xi - n). \quad (C.5)$$

(C.5) multiplizieren wir mit  $-i$  und setzen es gleich (C.2):

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial g} \frac{1}{(ig)^n} - \frac{in \varphi_0}{(ig)^{n+1}} = \frac{4 \varphi_0}{(ig)^n g} \iint \delta^2(x-\xi) dx d\xi - \frac{in \varphi_0}{(ig)^{n+1}}.$$

Die zweiten Summanden auf beiden Seiten heben sich gegenseitig auf, und es bleibt die im Text angegebene Beziehung übrig.